

第二十届华罗庚金杯少年数学邀请赛
决赛试题 C (小学高年级组) 详解

欢迎加入官方QQ群：187999960

一、填空题 (每小题 10 分, 共 80 分)

1. 计算 $\frac{1-0.75}{1.25+21\frac{1}{4}} + \frac{4 \times 0.3+0.1}{1.8-\frac{2}{5}} = (\quad)$

【答案】1

【解析】

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1-0.75}{1.25+2\frac{1}{4}} + \frac{4 \times 0.3+0.1}{1.8-\frac{2}{5}} \\ &= \frac{0.25}{1.25+2.25} + \frac{1.2+0.1}{1.8-0.4} \\ &= \frac{0.25}{3.5} + \frac{1.3}{1.4} \\ &= \frac{25}{350} + \frac{13}{14} \\ &= \frac{5}{70} + \frac{65}{70} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. 将自然数 1 至 8 分为两组,使两组的自然数各自之和的差等于 16,共有() 种不同的分法。

【答案】8

【解析】8 个数的总和为 36, 分成两组后差为 16, 因此两组分别为 26、10。

从和为 10 的一组入手:

10 分拆成 2 个数: $10=2+8=3+7=4+6$ (3 种)

10 分拆成 3 个数: $10=1+2+7=1+3+6=1+4+5=2+3+5$ (4 种)

10 分拆成 4 个数: $10=1+2+3+4$ (1 种)

确定了 10 的拆分方式, 就确定了 26 的拆分方式。因此一共有 8 种分法。

3. 将 2015 的十位、百位和千位的数字相加,得到的和写在 2015 个位数字之后, 得到一个自然数 20153; 将新数的十位、百位和千位数字相加, 得到的和写在 20153 个位数字之后, 得到 201536; 再次操作 2 次, 得到 201536914, 如此继续下去, 共操作了 2015 次, 得到一个很大的自然数, 这个自然数所有数字的和等于 ()。

【答案】8479

【解析】此题为操作类周期问题, 依次列举每次操作发现规律:

第 1 次操作: 20153, 增加了 3;

第 2 次操作: 201536, 增加了 6;

第 3 次操作: 2015369, 增加了 9;

第 4 次操作: 201536914, 增加了 14;

第 5 次操作: 20153691416, 增加了 16;

第 6 次操作：201536914166，增加了 6；
 第 7 次操作：20153691416611，增加了 11；
 第 8 次操作：2015369141661113，增加了 13；
 第 9 次操作：20153691416611133，增加了 3；
 第 10 次操作：201536914166111335，增加了 5；
 第 11 次操作：2015369141661113357，增加了 7；
 第 12 次操作：201536914166111335711，增加了 11；

.....

发现从第 7 次开始周期变化，周期为 5，则：

① 前 6 次操作后数字和为：2+0+1+5+3+6+9+1+4+1+6+6=44.

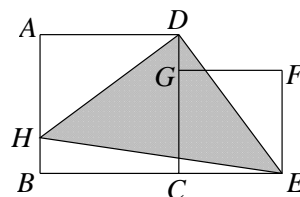
② 第 7~2015 次操作：

共 2015-6=2009 次操作，因为 2009÷5=401.....4，

所以此时和为：(1+1+1+3+3+5+7)×401+(1+1+1+3+3+5)=8435.

综上，经过 2015 次操作后，数字和为：44+8435=8479

4. 下图中，四边形 $ABCD$ 是边长为 11 厘米的正方形， G 在 CD 上，四边形 $CEFG$ 是边长为 9 厘米的正方形， H 在 AB 上， $\angle EDH$ 是直角，三角形 EDH 的面积是()。



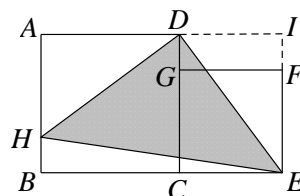
【考点】几何—比例模型—相似

【答案】101

【解析】法一：直角三角形相似

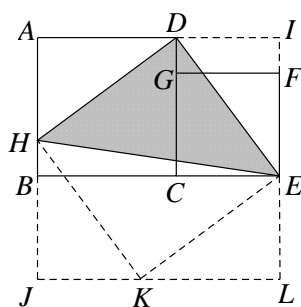
如图，延长 AD 、 EF ，因为 $\angle HDE = 90^\circ$ ，所以可得三角形 ADH 与三角形 DHE 相似，因为 $AD = HE = 11$ ，所以可得三角形 ADH 与三角形 DHE 全等（完全相同）， $AH = DI = 9$ ， $HB = 11 - 9 = 2$ 。

$$\begin{aligned} S_{\triangle HDE} &= S_{\triangle ABEI} - S_{\triangle AHD} - S_{\triangle DIE} - S_{\triangle HBE} \\ &= (11+9) \times 11 - 2 \times \frac{11 \times 9}{2} - \frac{2 \times (11+9)}{2} \\ &= 101 \end{aligned}$$



法二：弦图

如图，同上可得三角形 ADH 与三角形 DHE 全等（完全相同），那么三角形 HDE 为等腰直角三角形，可的弦图如下：



$$\begin{aligned}
 S_{\triangle HDE} &= \frac{S_{AJLI} - 4S_{\triangle DEI}}{2} \\
 &= \frac{(11+9) \times (11+9) - 4 \times \frac{11 \times 9}{2}}{2} \\
 &= 101
 \end{aligned}$$

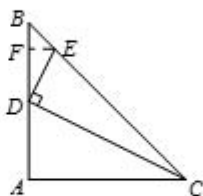
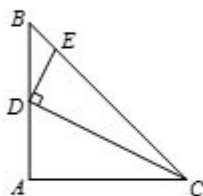
【点评】本题的思想在五六年级讲义中具有出现。

五年级华杯赛决赛冲刺班几何板块例题 11

例 11

(2013 年·迎春杯·六年级·初赛·第二大题第 8 小题)

11. 在等腰直角三角形 ABC 中, $\angle A=90^\circ$, AB 的长度是 60, D 是 AB 的中点, 且 $\angle CDE$ 为直角, 那么三角形 BDE 的面积是_____。



【考点】几何—比例模型—相似三角形

【答案】150 厘米

【解析】过 E 作 EF 垂直 BD 于 F , 那么 $\triangle BEF$ 是等腰直角三角形, 所以 $BE=EF$.

因为 ED 垂直 CD , 所以 $\triangle FDE$ 与 $\triangle ACD$ 各个角对应相等, 两个三角形相似.

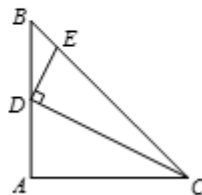
因为 $AC=2AD$, 所以 $FD=2EF$, 那么有 $FD=2BF$, 又 $BD=30$, 所以 $BF=EF=10$.

所以 $S_{\triangle BDE} = 30 \times 10 \div 2 = 150$.

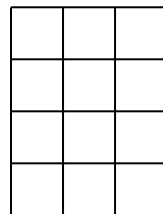
六年级寒假练习册专题拓展第 5 题

习题 5

★在等腰直角三角形 ABC 中, $\angle A=90^\circ$, AB 的长度是 60, D 是 AB 的中点, 且 $\angle CDE$ 为直角, 那么三角形 BDE 的面积是_____。

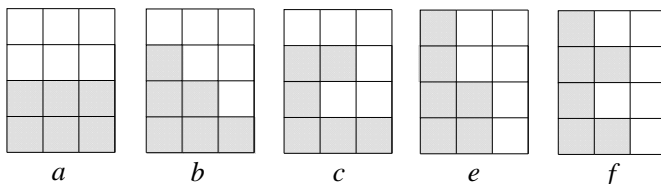


5. 下图是网格为 3×4 的长方形纸片,长方形纸片正面是灰色,反面是红色,网格是相同的小正方形.沿网格线将长方形裁剪为两个形状相同的卡片,如果形状和正反面颜色相同,则视为相同类型的卡片,则能裁剪出()种不同类型的卡片。



【答案】5种

【解析】共有12个小正方形方格,裁好的两个图形各占6个小正方形方格.沿格线裁剪那么裁得的图形均由小正方形方格拼成.两部分可以由高度进行分类,且黑白两张卡片关于中心对称.高度为2,有1个,如图a;高度为3,有2个,如图b、c;高度为4,有2个,如图d、e.共5种。



形状相同的卡片有以上5种,且每个图中两张卡片形状相同,正反面颜色也相同,故有5种。

【点评】华杯赛初赛模拟题(一)改编。

6. 一个长方形,棱长都是整数厘米,所有棱长之和是88厘米,问这个长方体总的侧面积最大是()平方厘米。

【考点】几何—立体型

【答案】242平方厘米

【解析】设长方体长、宽、高分别为 a 、 b 、 c ,可得 $4 \times (a+b+c) = 88$,即 $a+b+c = 22$ 。

底面积为宽 \times 高,侧面积为2个长 \times 宽和2个长 \times 高,求侧面积最大值,即求 $2(a+c)b$ 的最大值。 $(a+c)$ 与 b 和一定,差越小,积越大,令 $(a+c) = b = 11$ 。

侧面积最大为 $2 \times 11 \times 11 = 242$ 平方厘米。

7. $\left[x - \frac{1}{2} \right] = 3x - 5$, 这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,则 $x = ()$ 。

【答案】2

【解析】将 $\left[x - \frac{1}{2} \right] = 3x - 5$ 中 $x - \frac{1}{2}$ 整体替换成 a ,原式变为 $[a] = 3\left(a + \frac{1}{2} \right) - 5$

$$[a] = 3a + 1.5 - 5$$

整理可得：
$$[a] = 3([a] + \{a\}) - 3.5$$
$$[a] = 3[a] + 3\{a\} - 3.5$$

$$3.5 - 3\{a\} = 2[a]$$

注意 $\{a\}$ 的范围是 $0 \leq \{a\} < 1$ ，因此 $3.5 - 3\{a\}$ 的范围是 $0.5 < 3.5 - 3\{a\} \leq 3.5$ 。

在这个范围内的整数有 1、2、3。只能是 $2 = 2[a]$ ， $[a] = 1$ 。

因此 $3.5 - 3\{a\} = 2$ ， $\{a\} = 0.5$ ，因此 $a = 1.5$ ， $x = a + \frac{1}{2} = 2$

【点评】 本题同华杯赛决赛模拟二中第 9 题，同时在六年级春季班第 6 次课有补充了如果在高思记号中如果不是整数就是用换元法的思想。

8. 右边是一个算式，9 个汉字代表数字 1 至 9，不同的汉字代表不同的数字，则该算式可能的最大值 ()。

$$\text{盼} \times \text{望} + \text{树} \times \text{翠绿} + \text{天空} \times \text{湛蓝}$$

【答案】 8569

【解析】 位值原理，最值问题

$$\begin{aligned} & \text{盼} \times \text{望} + \text{树} \times \text{翠绿} + \text{天空} \times \text{湛蓝} \\ &= \text{盼} \times \text{望} + 10 \times \text{树} \times \text{翠} + (\text{天} \times 10 + \text{空}) \times (\text{湛} \times 10 + \text{蓝}) \\ &= \text{天} \times \text{湛} \times 100 + 10 \times (\text{树} \times \text{翠} + \text{天} \times \text{蓝} + \text{湛} \times \text{空}) + \text{盼} \times \text{望} + \text{树} \times \text{绿} + \text{空} \times \text{蓝} \end{aligned}$$

“天”和“湛”尽量大，分别取 9 和 8，令“天”为 9，“湛”为 8（两个汉字在原算式的位置等价）。

$$\text{原式} = 7200 + 10 \times (\text{树} \times \text{翠} + 9 \times \text{蓝} + 8 \times \text{空}) + \text{盼} \times \text{望} + \text{树} \times \text{绿} + \text{空} \times \text{蓝}$$

使 $(\text{树} \times \text{翠} + 9 \times \text{蓝} + 8 \times \text{空})$ 尽量大，应取“蓝”为 7，“空”为 6，“树”和“翠”中“树”在后面的运算中出现，故应尽量取大。取“树”为 5，“翠”为 4。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 7200 + 10 \times (5 \times 4 + 9 \times 7 + 8 \times 6) + \text{盼} \times \text{望} + 5 \times \text{绿} + 6 \times 7 \\ &= 8552 + \text{盼} \times \text{望} + 5 \times \text{绿} \end{aligned}$$

还有数字 1、2、3，令“绿”为 3，“盼”“望”为 1 和 2。

可得原式最大 $8552 + 1 \times 2 + 5 \times 3 = 8569$ 。

【点评】 决赛模拟题一第 8 题。

二、 解答下列各题（每小题 10 分，共 40 分，要求写出简要过程）

9. 已知 C 地为 A、B 两地的中点。上午 7 点整，甲车从 A 出发向 B 行进，乙车和丙车分别从 B 和 C 出发向 A 行进。甲车和丙车相遇时，乙车恰好走完全程的 $\frac{3}{8}$ ，上午 10 点丙车到达 A 地，10 点 30 分当乙车走到 A 地时，甲车距离 B 地还有 84 千米，那么 A 和 B 两地距离是多少千米？

【答案】 设全程为 $2a$ 千米。

(1) 甲和丙和走了 a 千米，乙走了 $2a \times \frac{3}{8} = \frac{3}{4}a$ 。则有 $(V_{\text{甲}} + V_{\text{丙}}) : V_{\text{乙}} = a : \frac{3}{4}a = 4 : 3$ 。

(2) 丙用 3 个小时从 C 走到 A，走了 a 千米，乙用 3.5 小时从 B 走到 A，走了 $2a$ 千米。

则有 $V_{丙}:V_{乙} = \frac{a}{3}:\frac{2a}{3.5} = 7:12$ 。设 $V_{丙} = 7v$, $V_{乙} = 12v$ 。

$(V_{甲} + 7v):12v = 4:3$, 所以 $V_{甲} = 9v$ 。

所以 $V_{甲}:V_{乙} = 9v:12v = 3:4$, 当 10 点 30 分乙走了 $2a$ 千米时, 甲走了 $2a \div 4 \times 3 = \frac{3}{2}a$ 千米。所以

$2a - \frac{3}{2}a = 84$, 所以 $a = 168$, 全程为 $2a$ 即 $168 \times 2 = 336$ 千米。

10. 将 2015 个分数 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2014}, \frac{1}{2015}, \frac{1}{2016}$ 化成小数, 共有多少个有限的小数?

【答案】33

【解析】有限小数:

1) 只有 5 因子: $\left[\frac{2016}{5} \right] = 403$, $2^8 = 256 < 403$

所以可以为: $5 \times 2^0, 5 \times 2^1, \dots, 5 \times 2^8$, 共 9 个。

2) 只有 5^2 因子: $\left[\frac{2016}{25} \right] = 80$, $2^6 = 64 < 80$

所以可以为: $5^2 \times 2^0, 5^2 \times 2^1, \dots, 5^2 \times 2^6$, 共 7 个。

3) 只有 5^3 因子: $\left[\frac{2016}{125} \right] = 16$, $2^4 = 16 \leq 16$

所以可以为: $5^3 \times 2^0, 5^3 \times 2^1, \dots, 5^3 \times 2^4$, 共 5 个。

4) 只有 5^4 因子: $\left[\frac{2016}{625} \right] = 3$, $2^1 < 3$

所以可以为: $5^4 \times 2^0, 5^4 \times 2^1$, 共 2 个。

5) $5^5 = 3125 > 2016$, 5 因子的 5 次方及以上在 2016 内不存在。

6) 不含 5 因子, 只含 2 因子:

可以为: $2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{10}$ 共 10 个。

综上所述, 有限小数共有 $9 + 7 + 5 + 2 + 10 = 33$ 个。

【点评】本题在六年级秋季班“难题突破每周三题第 5 期出过几乎一样的题目”。

(六年级难题突破每周 3 题第 5 期第 2 题原题) 将 2014 个分数 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2015}$ 化成小数, 其中混循环小数有多少个?

【解析】

一个最简分数: 1) 如果分母只有 2 和 5 因子组成, 则化为有限小数。

2) 如果分母没有 2 和 5 因子, 则化为纯循环小数。

3) 如果分母既有 2 或 5 因子, 也有其他质因子, 则化为混循环小数。

第一步: 纯循环小数有 $2014 - \left(\left[\frac{2015}{2} \right] + \left[\frac{2015}{5} \right] - \left[\frac{2015}{10} \right] \right) = 2014 - (1007 + 403 - 201) = 805$ 个。

第二步: 有限小数:

1) 只有 5 因子: $\left[\frac{2015}{5} \right] = 403$, $2^8 = 256 < 403$

所以可以为: $5 \times 2^0, 5 \times 2^1, \dots, 5 \times 2^8$, 共 9 个。

2) 只有 5^2 因子: $\left[\frac{2015}{25} \right] = 80$, $2^6 = 64 < 80$

所以可以为: $5^2 \times 2^0, 5^2 \times 2^1, \dots, 5^2 \times 2^6$, 共 7 个。

3) 只有 5^3 因子: $\left[\frac{2015}{125}\right]=16, 2^4=16 \leq 16$

所以可以为: $5^3 \times 2^0, 5^3 \times 2^1, \dots, 5^3 \times 2^4$, 共5个。

4) 只有 5^4 因子: $\left[\frac{2015}{625}\right]=3, 2^1 < 3$

所以可以为: $5^4 \times 2^0, 5^2 \times 2^2$, 共2个。

5) $5^5=3125 > 2015$, 5 因子的5次方及以上在2015内不存在。

6) 不含5因子, 只含2因子:

可以为: $2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{10}$ 共10个

综上所述, 有限小数共有 $9+7+5+2+10=33$ 个。

所以混循环小数共有 $2014-33-805=1176$ 个。

11. a, b 为整数, 小数点后第3位经四舍五入后, 式子 $\frac{a}{5} + \frac{b}{7} \approx 1.51$, 求 $a+b=?$

【答案】9

【解析】由题意可知 $1.505 \leq \frac{a}{5} + \frac{b}{7} < 1.515$, 整理可得: $52.675 \leq 7a+5b < 53.025$ 。

由于 a 和 b 都是整数, 所以 $7a+5b$ 也是整数, 因此 $7a+5b=53$ 。

则有 $\begin{cases} a=4 \\ b=5 \end{cases}$ 。所以 $a+b=4+5=9$ 。

【点评】本题在我们六年级寒假第一讲和五年级春季第一讲都有类似题出现, 六年级下午冲刺班第一次华杯赛模拟类似题。

(六年级寒假第一讲比较大小时与估算补充题第一题, 五年级春季第一讲比较大小时与估算例7)

$\frac{a}{3}, \frac{b}{7}$ 都是真分数, 且 $\frac{a}{3} + \frac{b}{7} \approx 1.38$, 那么 $\frac{a}{b} = \underline{\quad}$ 。

【解析】 $1.37 < \frac{a}{3} + \frac{b}{7} < 1.39$, $28.77 < 7a+3b < 29.19$, 只能是 $7a+3b=29$, 解得 $a=2, b=5$ 。则有

$\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$ 。

(六年级下午班第一次华杯赛模拟题) 已知 a 和 b 均是正整数, 并且 $\frac{a}{7} + \frac{b}{11}$ 的四舍五入到百分位为 1.03, 则 $a+b$ 等于 $\underline{\quad}$ 。

12. 已知算式 $\overline{abcd} = \overline{aad} \times e$, 式中不同的字母代表不同的数码, 问四位数 \overline{abcd} 最大值是多少?

【答案】3015

【解析】

最值问题, 从极限入手:

(1) $a=9$ 时, $9bcd=99d \times e$; $e=8$ 时, $999 \times 8=7992$, 则 e 必为 9, 与 a 相同, 不合理;

(2) $a=8$ 时, $8bcd=88d \times e$; 同理可以 e 必为 9, 此时根据个位特性, 知, $d=5, 885 \times 9=7965$, 不合理;

(3) $a=7$ 时, 同理可知 e 必为 9, d 为 $5, 775 \times 9=6975$; 不合理;

(4) $a=6$ 时, 同理, 验证: $665 \times 9=5985$, 不合理;

(5) $a=5$ 时, 验证: 555 , 不合理;

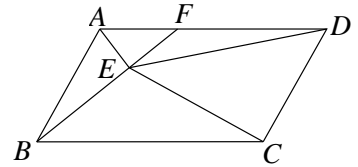
(6) $a=4$ 时, 验证: $445 \times 9=4005$ 不合理;

(7) $a=3$ 时, 验证: $335 \times 9=3015$ 合理;

所以, 最大的合理四位数是 3015。

三 解答下列各题（每题 15 分，共 30 分，要求写出详细过程）

13. 在下图中， $ABCD$ 是平行四边形， F 在 AD 上， $\triangle AEF$ 的面积为 8cm^2 ， $\triangle DEF$ 的面积为 12cm^2 ，四边形 $BCDF$ 的面积为 72cm^2 ，求出 $\triangle CDE$ 的面积？



【答案】35

【解析】由于三角形 AEF 与三角形 FED 等高，面积之比等于底边之比， $AF:FD=2:3$ ， $AF:AD=2:5$ ， $S_{ABF}:S_{ABCD}=1:5$ ， $S_{BCDF}:S_{ABCD}=4:5$ 。

因此平行四边形面积为 $72 \div 4 \times 5 = 90\text{cm}^2$ 。 $S_{ABF} = 90 \div 5 = 18\text{cm}^2$ ， $S_{ABE} = 18 - 8 = 10\text{cm}^2$ 。

由一半模型可知， $S_{ABE} + S_{CDE} = 90 \div 2 = 45\text{cm}^2$ ，所以 $S_{CDE} = 45 - 10 = 35\text{cm}^2$ 。

14. 将 530 本书分给 48 名学生，至少有几名学生分到的书的数量相同？

【答案】3 人

【解析】

极端入手：

1) 当这 48 人分到的书的数量都不同时，书总数最少是 $0+1+2+\dots+47=1128$ 本大于 530 本，不符合。

2) 当这 48 人分到的书的数量最多 2 人相同时，书总数最少是 $(0+1+2+\dots+23) \times 2 = 552$ 本大于 530 本，不符合。

3) 当这 48 人分到的书的数量最多 3 人相同时，书总数最少是 $(0+1+2+\dots+15) \times 3 = 360$ 本小于 530 本，符合题意。

最少 3 人。